УДК 531.51:531.18:530.12

ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ МАССИВНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Н.А. Ахраменко

Белорусский государственный университет транспорта, *Гомель*

THE FIELD OF GRAVITY OF A MASSIVE SPHERICAL SHELL

N.A. Akhramenko

Belarusian State University of Transport, *Gomel*

Получены выражения для величины напряженности и потенциала гравитационного поля массивной сферической оболочки. Показано, что полученное дифференциальное уравнение для напряженности является нелинейным. Полученные соотношения являются обобщением для величины напряженности и потенциала гравитационного поля в нерелятивистском случае.

Ключевые слова: *теория тяготения*, *напряженность гравитационного поля*, *потенциал поля.*

Expressions for the magnitude and potential of the gravitational field of a massive spherical shell are obtained. It is shown that the differential equation obtained for the intensity is nonlinear. The relations obtained are a generalization for the strength and potential of the gravitational field in the nonrelativistic case.

Keywords: *theory of gravitation*, *gravitational field intensity*, *field potential.*

Введение

В теории тяготения Ньютона гравитационная масса является источником ее гравитационного поля. Напряженность гравитационного поля, определяемая распределением массы в пространстве, представляет собой его силовую характеристику. Как известно [1]–[5], в теории тяготения Ньютона напряженность статического поля тяготения определяется величиной силы, действующей на покоящееся тело единичной массы, помещенное в это поле. Статическое поле тяготения сферической оболочки в классической механике несложно определяется использованием теоремы Гаусса для потока вектора напряженности гравитационного поля, как и электрическое поле в соответствующей задаче электростатики [6].

Однако в случае сильных гравитационных полей ситуация изменяется. По мнению Бриллюэна [7] в формировании гравитационного поля вместе с массой вещества должна участвовать и масса самого поля. Имеются и другие теории гравитации, учитывающие массу поля, например [8]. В данной работе определяются характеристики гравитационного поля массивной сферической оболочки с учетом предположения Бриллюэна.

1 Определение напряженности гравитационного поля

Пусть имеется однородная сферическая оболочка радиуса R и массой m.

Предположим, что существующее в пространстве поле напряженности $\mathbf{g}$ формируется как этой сферической оболочкой, так и самим полем. Ввиду сферической симметрии это поле будет зависеть только от одной переменной r и может быть записано в виде

$$\mathbf{g} = g(r)\frac{\mathbf{r}}{r}, \qquad (1.1)$$

где радиус-вектор $\mathbf{r}$ проведен из центра сферы, а вектор $\mathbf{g}$ направлен к центру сферы.

Возьмем произвольную точку A на расстоянии r от центра O и построим вспомогательную сферу радиуса r также с центром в точке O (рисунок 1.1).

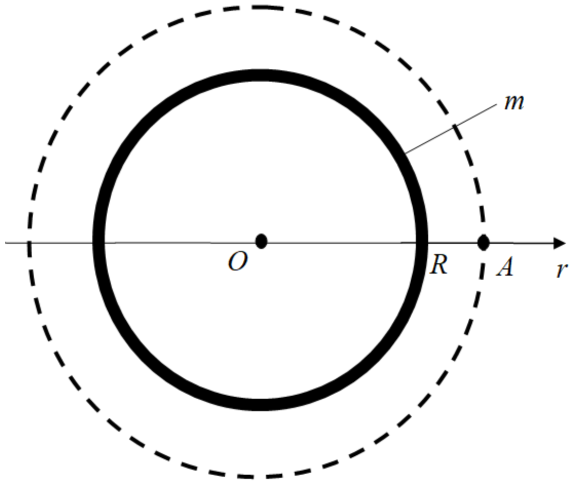

Рисунок 1.1 – Массивная сферическая оболочка массой m

Ввиду сферической симметрии напряженность гравитационного поля в т. A будет определяться суммарной массой сосредоточенной внутри сферы радиуса OA. В случае $|OA| > R$ внутри вспомогательной сферы будет находиться сферическая оболочка массой m и некоторая масса самого гравитационного поля.

Объемную плотность энергии этого поля запишем в виде [9, с. 437]

$$w = -\frac{g^2}{8\pi G}, \qquad (1.2)$$

где G – гравитационная постоянная.

Соответствующую ей плотность массы с учетом (1.2) запишем в виде

$$\rho = \frac{w}{c^2} = -\frac{g^2}{8\pi G c^2}, \qquad (1.3)$$

где c – скорость света в вакууме.

Тогда вся масса внутри вспомогательной сферы

$$M = m + \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr, \qquad (1.4)$$

где ρ – плотность массы гравитационного поля, определяемая согласно (1.3).

Подставив плотность массы гравитационного поля, соотношение (1.4) перепишется в виде

$$M = m - \int_0^r \frac{g^2 r^2}{2c^2 G} dr. \qquad (1.5)$$

Воспользуемся тем, что напряженность поля сферически-симметричного распределения массы (с учетом (1.1)) можно записать в виде

$$g = -\frac{GM}{r^2}. \qquad (1.6)$$

Тогда, подставив в соотношение (1.6) M из выражения (1.5), получим

$$g = -\frac{G}{r^2}\left(m - \int_0^r \frac{g^2 r^2}{2c^2 G} dr\right). \qquad (1.7)$$

Дифференцируя соотношение (1.7), можно получить

$$\frac{dg}{dr} + 2\frac{g}{r} - \frac{g^2}{2c^2} = 0. \qquad (1.8)$$

Одно из решений уравнения (1.8) тривиальное: $g = 0$. Ввиду того, что напряженность поля в центре сферы из соображений симметрии можно положить равной нулю, это решение будет определять поле внутри сферической оболочки.

Заменой переменной $\psi = gr$ уравнение (1.8) преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{2c^2 d\psi}{\psi^2 - 2c^2\psi} = \frac{dr}{r}. \qquad (1.9)$$

Интегрируя уравнение (1.9), можно получить

$$\frac{\psi - 2c^2}{\psi} = \alpha r, \qquad (1.10)$$

где α – постоянная интегрирования.

Подставив в выражение (1.10) $\psi = gr$, напряженность гравитационного поля запишется в виде

$$g = \frac{2c^2}{r(1-\alpha r)}. \qquad (1.11)$$

Полученное второе решение будет определять напряженность гравитационного поля вне сферической оболочки.

Постоянную интегрирования α находим, подставив (1.11) в (1.7)

$$\frac{2c^2}{r(1-\alpha r)} = -\frac{G}{r^2}\left(m - \int_R^r \frac{1}{2c^2 G}\left(\frac{2c^2}{1-\alpha r}\right)^2 dr\right). \qquad (1.12)$$

Вычисляя α из (1.12), получаем

$$\alpha = \frac{1}{R} + \frac{2c^2}{Gm}. \qquad (1.13)$$

Тогда, подставив α из соотношения (1.13) в (1.11), найдем

$$g = \frac{2c^2}{r\left[1 - \left(\frac{1}{R} + \frac{2c^2}{Gm}\right)r\right]}. \qquad (1.14)$$

После преобразований (1.14) представится в виде

$$g = -\frac{Gm}{r^2\left[1 + \frac{Gm}{2c^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)\right]}. \qquad (1.15)$$

Выражение (1.15) определяет напряженность поля при $r > R$.

Окончательно для напряженности гравитационного поля (с учетом (1.1)) запишем

$$g(r) = \begin{cases} 0, & r < R; \\ -\dfrac{Gm}{2R^2}, & r = R; \\ -\dfrac{Gm}{r^2\left[1 + \frac{Gm}{2c^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)\right]}, & r > R. \end{cases} \qquad (1.16)$$

В выражении (1.16) напряженность гравитационного поля при $r = R$ записана с учетом решения соответствующей задачи электростатики [6].

2 Определение потенциала гравитационного поля

Для нахождения потенциала гравитационного поля используем соотношение

$$g(r) = -\frac{d\varphi(r)}{dr}. \qquad (2.1)$$

Из соотношения (2.1) следует

$$\varphi(r) = -\int g(r) dr. \qquad (2.2)$$

Подставив в (2.2) напряженность поля из (1.16), получим (для $r \geq R$)

$$\varphi = -\int \frac{Gm}{r^2\left[1 + \frac{Gm}{2c^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)\right]} dr. \qquad (2.3)$$

Интегрируя соотношение (2.3), получаем

$$\varphi = 2c^2 \ln\left[1 + \frac{Gm}{2c^2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)\right] + const. \qquad (2.4)$$

Постоянную интегрирования в (2.4) выбираем такой, чтобы потенциал на бесконечности был равен нулю. Этому условию соответствует

$$-2c^2 \ln\left[1+\frac{Gm}{2c^2R}\right] = const. \qquad (2.5)$$

С учетом найденной согласно (2.5) константы получим

$$\varphi = 2c^2 \ln\left[1-\frac{Gm}{2c^2 r\left(1+\dfrac{Gm}{2c^2R}\right)}\right]. \qquad (2.6)$$

Потенциал на поверхности сферической оболочки, с учетом (2.6), запишется в виде

$$\varphi(R) = 2c^2 \ln\left[1-\frac{Gm}{2c^2 R\left(1+\dfrac{Gm}{2c^2R}\right)}\right]. \qquad (2.7)$$

Потенциал, определяемый соотношением (2.7), будет справедлив и для точек внутри сферической оболочки, так как напряженность гравитационного поля внутри ее равна нулю. Тогда окончательно для потенциала можно записать

$$\varphi(r) = \begin{cases} 2c^2 \ln\left[1-\dfrac{Gm}{2c^2 R\left(1+\dfrac{Gm}{2c^2R}\right)}\right], & r \le R; \\ 2c^2 \ln\left[1-\dfrac{Gm}{2c^2 r\left(1+\dfrac{Gm}{2c^2R}\right)}\right], & r \ge R. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Потенциал, определяемый согласно (2.8), является непрерывной функцией при любых значениях r, в том числе и при $r = R$.

3 Приближение для слабых гравитационных полей

Для малых масс и, соответственно, слабых гравитационных полей, напряженность гравитационного поля можно представить в виде

$$g = -\frac{Gm}{r^2\left[1+\dfrac{Gm}{2c^2}\left(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r}\right)\right]} \approx \qquad (3.1)$$

$$\approx -\frac{Gm}{r^2}\left(1-\frac{Gm}{2c^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)\right) =$$

$$= -\frac{Gm}{r^2} + \frac{G^2m^2}{2c^2r^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)$$

(при $r > R$).

Первое слагаемое в выражении (3.1) (после последнего знака равенства) соответствует напряженности гравитационного поля ньютоновского поля тяготения. Второе слагаемое определяет величину поправки к этому полю.

Аналогично для потенциала гравитационного поля можно получить выражение

$$\varphi = 2c^2 \ln\left[1-\frac{Gm}{2c^2 r\left(1+\dfrac{Gm}{2c^2R}\right)}\right] \approx \qquad (3.2)$$

$$\approx 2c^2 \ln\left[1-\frac{Gm}{2c^2r}\right] \approx$$

$$\approx 2c^2\left[-\frac{Gm}{2c^2r}-\frac{1}{2}\left(\frac{Gm}{2c^2r}\right)^2\right] =$$

$$= -\frac{Gm}{r}-\frac{1}{4c^2}\left(\frac{Gm}{r}\right)^2 \quad (\text{при } r \ge R).$$

Первое слагаемое в выражении (3.2) (также после последнего знака равенства) соответствует потенциалу гравитационного поля ньютоновского поля тяготения. Второе слагаемое определяет величину поправки к этому потенциалу.

Из соотношений (3.1) и (3.2) следуют напряженность и потенциал ньютоновского поля тяготения (в случае пренебрежения величиной поправки)

$$g(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ -\dfrac{Gm}{2R^2}, & r = R \\ -\dfrac{Gm}{r^2}, & r > R \end{cases} \qquad (3.3)$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\dfrac{Gm}{R}, & r \le R; \\ -\dfrac{Gm}{r}, & r \ge R. \end{cases} \qquad (3.4)$$

Выражение (3.3) показывает, что напряженность поля претерпевает разрыв при $r = R$, а потенциал согласно (3.4) является непрерывной функцией.

Заключение

Таким образом, учитывая предположение Бриллюэна о том, что в формировании гравитационного поля вместе с массой вещества должна участвовать и масса самого поля, определены напряженность и потенциал гравитационного поля массивной сферической оболочки. Полученные соотношения являются обобщением для величины напряженности и потенциала гравитационного поля в нерелятивистском случае. Из этих соотношений для случая слабых гравитационных полей следуют выражения напряженности и потенциала, соответствующие ньютоновскому полю тяготения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сивухин*, *Д.В.* Общий курс физики в 5-и т. Т. 1. Механика. / Д.В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2005. – 560 с.

2. *Савельев*, *И.В.* Курс физики в 3 т. Т 1. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1989. – 352 с.

3. *Матвеев*, *А.Н.* Механика и теория относительности / А.Н. Матвеев. – М.: ОНИКС 21 век, 2003. – 432 с.

4. *Детлаф*, *А.А.* Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Высш. шк., 1989. – 608 с.

5. *Яворский*, *Б.М.* Справочник по физике / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М.: Наука, 1990. – 624 с.

6. *Ахраменко*, *Н.А.* К определению электрического поля равномерно заряженной сферы / Н.А. Ахраменко, Л.М. Булавко // Вестник БГУ. Серия. 1. – 2005. – № 3. – С. 40–43.

7. *Бриллюэн*, *Л.* Новый взгляд на теорию относительности / Л. Бриллюэн. – М.: Мир, 1972. – 143 с.

8. *Сердюков*, *А.Н.* Калибровочная теория скалярного гравитационного поля / А.Н. Сердюков. – Гомель: изд-во Гомельского гос. ун-та, 2005. – 257 с.

9. *Ландау*, *Л. Д.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

Поступила в редакцию 07.05.18.